柔構造ベイズ手法と品質管理への応用

蔵　野　正　美
堀　口　正　之
佐々木　　稔

I　はじめに

統計的手法を用いた品質管理は、W. シューハート（1931）に始まり、管理図法と呼ばれるこの方法は、現在の管理図の原型として知られている。対象とする観測データからのプロットにより、製品の品質のバラつきが容認できる範囲のものであるか否かを、中心線からの上下の管理限界線の範囲内にあるか否か、さらに範囲内でのプロットの傾向によって判断して品質管理を行う。

ベイズ推定を用いた適応型の品質管理については、多くの研究があり、品質管理の現場でその有効性が報告されている。ベイズ推定を基本とした品質管理では、蓄積された情報を基にして管理限界、サンプルサイズおよびサンプリング間隔を変更して事象や状況の変化に適応していく。例えば、シューハート管理図におけるサンプリング間隔を適応的に変化させる手法として、可変サンプリング間隔管理図（Reynolds et al. 1988）がある。可変サンプリング間隔管理図においては、ATS（Average Time to Signal, 初めてサンプルが取られた時から管理限界を超えたサンプルが取られるまでの時間の平均）のような統計的効率の基準に基づいて管理図の良さが強調されている。この研究の適用事例として、Baxley（1995）は、ナイロンフィラメントの重要な品質特性を監視するために可変サンプリング間隔管理図を適用し、固定サン

プリング間隔管理図と比べてシフト毎に測定するフィラメントのサンプリング数を80から40に削減するというサンプリング費用削減に効果があったとしている。

また、適応型の品質管理の問題を、未知パラメータをもつ逐次決定過程として定式化して動的計画法を用いて最適な管理政策を求める研究（Bather 1963, Girshik and Rubin 1952, Porteus and Angelus 1997, Tagaras 1994, 1998）もなされている。

ベイズ流の方法では、未知のパラメータに対する事前情報や知識を１つの事前分布で表現する必要がある（繁桝1985、宮沢1971、渡部1999)。しかし、事前知識が漠然としていて１つの事前分布によって考えることは実際の適用場面において困難であることがある。また、事前情報から事前分布を推定あるいは構成するとき、その間の食い違いによる大きな推定誤差を引き起こすことがある。

これらの困難を克服する方法として、より柔構造をもったベイズ手法が考えられる。De Robertis and Hartigan（1981）は、区間ベイズ法を提唱している。これは、未知パラメータに対する事前知識を測度の区間（interval of measures）で表し、事前情報に対して頑健で柔軟な適応性に富んだベイズ手法を構成しようとするものである。また、情報のあいまいさに対しては、ファジィ理論（坂和2007、金川1991/92 p. 75）をとりこんで事前情報をファジィ集合で表すことも有効である。

ここでは、母平均が未知（分散は既知）の正規母集団の品質管理に区間ベイズ法とファジィベイズ法を適用して柔軟性に富んだ管理法を考察する。従って、本論文は２つのテーマ、すなわち、区間ベイズ法とファジィベイズ法の品質管理について論究する。Ⅱ章では、必要な記号や補題を与えて、続くⅢ章、Ⅳ章の準備をする。Ⅲ章では、区間ベイズ法を取り扱い、我々の先行研究（佐々木、堀口、蔵野2008、佐々木、堀口2011）と関連付けながら、ベイズリスク（Bayes risk)、α-パーセンタイルの管理図への応用を議論する。Ⅳ章ではファジィベイズ法を取り扱う。

品質管理の世界は、通常、主観や曖昧さは少ないと思われている。特に、製造された製品の合否を判定するための規格値は厳密なものであると思われがちである。しかし、そうとも言い切れないところがある。規格値には定量的のものと定性的のものがある。定量的な場合は、上限値或いは下限値を少しでも外れれば、不合格と割り切って判定することができる（表１）。これに対して、定性値は、合否の境界が曖昧である。化学分析を例にとれば、外観（色、溶状、濁度・透明度)、におい、堅さ、異物等の定性的な規格値は、極めて曖昧である（表２）。

表１：定量的な規格値

規格項目	下限値	上限値	測定値	判定
比重	1.60	1.70	1.67	合格（Accept）
			1.71	不合格（Reject）

表２：定性的な規格値

規格項目	下限値	上限値	測定値	判定
外観（色）	白色であること （黄色みがないこと）	人の感覚		人により異なる
外観（溶状）	無色澄明であること （濁り着色の無いこと）			
におい	無臭であること			

このような人の感覚による評価、判定を行うものを官能検査（手法としては、一点試験法、二点識別試験法、三点識別試験法、配偶法、順位法、採点法、格付け法、一対比較法等がある）と呼んでいる。しかし、官能検査は人の五感に頼っているため、感情の変化、習熟度等により個人差が大きい問題がある。この個人差を極力小さくするために、外観等の評価の場合、通常は、標準資料（現物見本、色見本、標準液、等）と比較して判定している。尚、透明液体の場合、ハーゼン色数などが JIS 規格にある。

何れにしても、人の感覚が頼りである以上は、境界は曖昧である。このような曖昧さを統計的品質管理に積極的に取り込むこと及びその方法論としてファジィ理論の応用の必要性が、以前より、主張されている（長沢1992, pp. 83〜89)。しかし、現在まで、品質管理の分野において、ファジィ理論が導入された例は我々の知る限りにおいてほとんどない。そこで、本論文では、我々の先行研究（佐々木、堀口2012）を一歩進め、ファジィ理論も取り込んだファジイベイズ手法の品質管理への応用を提案する。具体的には、Zadehの拡張原理を適用しファジィ領域まで応用範囲を拡大することを目的とする。

Ⅱ　記号と補題

この章は続くⅢ章、Ⅳ章に必要な記号や補題を与える。§Ⅱ.1では、De Robertis and Hartigan（1981）を参照して、事前測度Qの存在範囲を表す測度区間を定義し、積分比の範囲を求める補題を述べる。§Ⅱ.2ではファジィ理論についての若干の解説を行う。

Ⅱ.1　測度区間と補題

$\Theta=(-\infty, \infty)$ をパラメータ空間として、母平均 $\theta\in\Theta$、分散 σ_0^2（既知）の正規母集団 $N(\theta, \sigma_0^2)$ を考え、その密度関数 $f(x|\theta)$ は次で与えられる：

$$X\sim N(\theta, \sigma_0^2), \qquad f(x|\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_0}e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma_0^2}}(\theta\in\Theta) \tag{1}$$

Θ の部分集合からなるボレル集合族を $\mathcal{B}$ として、可測空間 $(\Theta, \mathcal{B})$ 上の σ-有限測度 L, U について、全ての $A\in\mathcal{B}$ に対して $L(A)\leq U(A)$ が成り立つとき $L\leq U$ と記す。$L\leq U$ のとき、L と U のそれぞれを左端点および右端点にもつ区間 $I(L, U)$ を次で定める.

$$I(L, U):=\{Q|L\leq Q\leq U, Q \text{ は } \sigma\text{- 有限測度}\} \tag{2}$$

パラメータ θ の事前知識を表す事前測度（prior measure）Q は、$(\Theta, \mathcal{B})$ 上の σ-有限測度 $L, U(L\leq U)$ の区間 $I(L, U)$ に含まれるとする。すなわち、次が成り立つとする。

$$Q \in I(L, U) \tag{3}$$

このとき、区間 $I(L, U)$ を事前測度区間（intervals of prior measures）という。g を $(\Theta, \mathcal{B})$ 上の Q-可積分関数とするとき、記号の簡単のためにその積分を次のように表す：

$$Q(g) = \int_{\Theta} g(\theta)\, dQ(\theta)$$

次の補題は、$\dfrac{Q(b)}{Q(c)}$, $Q \in I(L, U)$ の範囲を与えている。

補題 1（De Robertis and Hartigan 1981） b, c を $(\Theta, \mathcal{B})$ 上の Q-可積分関数で、任意の $Q \in I(L, U)$ に対して $Q(c) > 0$ とする。このとき、次が成り立つ。

1. $\inf\left\{\dfrac{Q(b)}{Q(c)} \,\middle|\, Q \in I(L, U)\right\}$ は、次の方程式の一意の解 λ として与えられる：

$$U(b - \lambda c)^{-} + L(b - \lambda c)^{+} = 0 \tag{4}$$

2. $\sup\left\{\dfrac{Q(b)}{Q(c)} \,\middle|\, Q \in I(L, U)\right\}$ は、次の方程式の一意の解 λ として与えられる：

$$U(b - \lambda c)^{+} + L(b - \lambda c)^{-} = 0 \tag{5}$$

但し、任意の関数 $g(\theta)$ に対して

$$g^{+}(\theta) = \max\{g(\theta), 0\},\ g^{-}(\theta) = \min\{g(\theta), 0\} \tag{6}$$

$X = x$ を観測したときの事前測度 Q の事後測度 Q_x は $Q_x(A) = \int_A f(x \mid \theta) Q(d\theta)\ (A \in \mathcal{B})$ で与えられる（De Robertis and Hartigan 1981）。このとき、事後測度の全体 $\{Q_x \mid Q \in I(L, U)\}$ はやはり区間として与えられることが次で述べられる。

補題 2（De Robertis and Hartigan 1981）

$$\{Q_x \mid Q \in I(L, U)\} = I(L_x, U_x) \tag{7}$$

但し、

$$L_x(A) = \int_A f(x \mid \theta)\, dL,\ U_x(A) = \int_A f(x \mid \theta)\, dU\ (A \in \mathcal{B}) \tag{8}$$

である。

II.2　Zadeh の拡張原理とファジィ正規分布

はじめに、ファジィ数と δ-レベル集合、ファジィ正規分布など次章において必要となるいくつかの補題について述べておく。

実数空間全体を $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ で表し、$\mathbb{R}$上のファジィ集合をそのメンバーシップ（membership）関数 $\tilde{a}:\mathbb{R}\to[0,1]$ で表す。$\mathbb{R}$上のファジィ集合の全体を $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ で表す。$\tilde{a}$ と任意の $\delta(0<\delta\leq 1)$ に対して

$$\tilde{a}_\delta := \{x\in\mathbb{R}\,|\,\tilde{a}(x)\geq\delta\}$$

を $\tilde{a}$ の δ- レベル集合という。また、$\tilde{a}_0$ で集合 $\{x\in\mathbb{R}\,|\,\tilde{a}(x)>0\}$ の閉包（closure）を表し $\tilde{a}$ のサポート（support）という。

$\mathbb{R}$上のファジィ集合 $\tilde{a}$ が次の(i)-(iv)の条件を満たすとき、$\tilde{a}$ をファジィ数という:

(i)（normality）$\tilde{a}(x_0)=1$ となる $x_0\in\mathbb{R}$ が存在する。

(ii)（convexity）任意の $x_1, x_2\in\mathbb{R}$, $\lambda(0\leq\lambda\leq 1)$ に対して

$$\tilde{a}(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\geq\tilde{a}(x_1)\wedge\tilde{a}(x_2)$$

ただし、2つの実数 a, b に対して $a\wedge b=\min\{a,b\}$ である。

(iii)（upper-semicontinuity）関数 $\tilde{a}:\mathbb{R}\to[0,1]$ は上半連続である。

(iv) $\tilde{a}_0$ は有界閉集合である。

ファジィ数の全体を $\tilde{\mathbb{R}}$ で表す。上の条件(ii)-(iv)は、任意の $\delta(0<\delta\leq 1)$ に対して δ-レベル集合 $\tilde{a}_\delta$ が有界閉区間であることと同値である（Novak 1989)。従って、$\tilde{a}\in\tilde{\mathbb{R}}$ のとき、$\tilde{a}_\delta=[\tilde{a}_\delta^-, \tilde{a}_\delta^+]$ と表す。また、$\tilde{\mathbb{R}}$上のファジィ・マックス順序 $\succcurlyeq$ は次で与えられる：$\tilde{a}, \tilde{b}\in\tilde{\mathbb{R}}$ 対して $\tilde{a}\preccurlyeq\tilde{b}$ とは、$\tilde{a}_\delta^-\leq\tilde{b}_\delta^-$, $\tilde{a}_\delta^+\leq\tilde{b}_\delta^+\leq\delta\leq 1$）が成り立つ場合をいう。$\tilde{a}<\tilde{b}$ とは、$\tilde{a}\preccurlyeq\tilde{b}$, $\tilde{a}\neq\tilde{b}$ が成り立つ場合をいう。ただし、$\tilde{a}_\delta=[\tilde{a}_\delta^-, \tilde{a}_\delta^+]$, $\tilde{b}_\delta=[\tilde{b}_\delta^-, \tilde{b}_\delta^+]$（Ramík and Římánek 1985）。

Zadeh の拡張原理（Zadeh 1965）は、関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を次の方法により $f:\mathcal{F}(\mathbb{R})\to\mathcal{F}(\mathbb{R})$ に拡張する。

Zadeh（1965）の拡張原理：

$\tilde{x}\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$ に対して、

$$f(\tilde{x})(y)=\begin{cases}\sup_{x\,;\,f(x)=y}\tilde{x}(x) & \text{if } f^{-1}(y)\neq\phi \\ 0 & \text{if } f^{-1}(y)=\phi\end{cases}\quad(y\in\mathbb{R}) \tag{9}$$

補題 3（Nguyen 1978） $f^{-1}(y)\neq\phi$ となる任意の $y\in\mathbb{R}$ に対して、$f(\tilde{x})(y)=\tilde{x}(x)$ となる $x\in\mathbb{R}$ が存在するとする。このとき、

$$f(\tilde{x})_\delta=f(\tilde{x}_\delta)=\{f(x)\in\mathbb{R}\,|\,x\in\tilde{x}_\delta\}\quad(0<\delta\leq 1) \tag{10}$$

が成り立つ。

補題 3 より，次が明らかに成り立つ。

補題 4 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が単調かつ連続関数とする。このとき、$\tilde{x}\in\tilde{\mathbb{R}}$ ならば $f(\tilde{x})\in\tilde{\mathbb{R}}$ である。

平均 μ、分散 σ^2 の正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ の確率密度関数と閉区間［a, b］上の正規確率を次の記号で表す。

$$N(\mu,\sigma^2)(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\theta)^2}{2\sigma^2}}\quad(t\in\mathbb{R}),$$

$$N([a,b])\,|\,\mu,\sigma^2)=\int_a^b N(\mu,\sigma^2)(t)\,dt. \tag{11}$$

任意の$\mathbb{R}$上のボレル関数 g に対して、期待値（積分）を次で表す。

$$E(g\,|\,\mu,\sigma^2)=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)N(\mu,\sigma^2)(t)\,dt \tag{12}$$

任意の$\mathbb{R}$上のファジィ集合 $\tilde{\mu}\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$ を平均にもつ分散 σ^2 の正規分布 $N(\tilde{\mu},\sigma^2)$を Zadeh の拡張原理により次で定める：

区間［a, b］のファジィ生起確率

$$N([a,b]\,|\,\tilde{\mu},\sigma^2)(t)=\sup_{\mu:N([a,b]\,|\,\mu,\sigma^2)=t}\tilde{\mu}(\mu),$$
$$-\infty<a<b<\infty,\ 0\leq t\leq 1 \tag{13}$$

同様に期待値は次で与えられる：

$$E(g\,|\,\tilde{\mu},\sigma^2)(t)=\sup_{\mu:E(g|\mu,\sigma^2)=t}\tilde{\mu}(\mu),\ -\infty<a<b<\infty,\ -\infty<t<\infty \tag{14}$$

Ⅲ　区間ベイズ推定と品質管理

ここでは、母平均 $\theta\in\Theta$、分散 σ_0^2（既知）の正規母集団に対する区間ベイ

ズ法について、ベイズリスク最小問題及びパーセンタイルを議論し、これらを応用して有効な品質管理法を構成する。

§Ⅱ.1の(1)の正規母集団モデルにおいて、この章を通して次を仮定する：

仮定 A

未知の母平均 $\theta\in\Theta$ の事前測度 Q は、区間 $I(L, kL)$ に含まれる。即ち、

$$Q\in I(L, kL) \tag{15}$$

但し、L は $(\Theta, \mathcal{B})$ 上のルベーグ測度で、k は正の定数である。

Ⅲ.1　ベイズリスク最小管理法

決定空間を $D=\{1, 2\}$ とする。$\theta\in\Theta$ が真のとき、決定 $d\in D$ をとったときの損失（loss）を $r(d, \theta)$ で表す。品質管理の場面を想定して、$\theta_0<\theta_1$ に対して r を次のように与える：

$$r(1, \theta)=\begin{cases}-1, & \theta\geq\theta_1\\ 1, & \theta_0<\theta<\theta_1\\ -1, & \theta\leq\theta_0\end{cases}\qquad r(2, \theta)=\begin{cases}1, & \theta\geq\theta_1\\ -1, & \theta_0<\theta<\theta_1\\ 1, & \theta\leq\theta_0\end{cases} \tag{16}$$

$X=x$ のときの事後測度区間 $I(L_x, kL_x)$ に対するベイズリスクの取り得る区間 $\beta(d, x)$ は次で定まる。

$$\beta(d, x)=\left[\underline{\beta}(d, x), \bar{\beta}(d, x)\right],$$

ただし、

$$\underline{\beta}(d, x)=\inf\left\{\frac{Q(r(d,\cdot))}{Q(1)}\middle| Q\in I(L_x, kL_x)\right\},$$

$$\bar{\beta}(d, x)=\sup\left\{\frac{Q(r(d,\cdot))}{Q(1)}\middle| Q\in I(L_x, kL_x)\right\} \tag{17}$$

補題 5． ベイズリスクの区間 $\beta(d, x)$ の端点は次で与えられる：

$$\underline{\beta}(1, x)=\frac{(k+1)\varphi-k}{k-(k-1)\varphi},\quad \bar{\beta}(1, x)=\frac{(k+1)\varphi-1}{(k-1)\varphi+1},$$

$$\underline{\beta}(2, x)=\frac{1-(k+1)\varphi}{1+(k-1)\varphi},\quad \bar{\beta}(2, x)=\frac{1-(k+1)\varphi}{1-(k-1)\varphi} \tag{18}$$

ただし、

$$\varphi=\varphi(x\,|\,\theta_0,\theta_1,\sigma_0)=\int_{\theta_0}^{\theta_1}N(x,\sigma_0^2)(t)\,dt=\Psi\left(\frac{\theta_1-x}{\sigma_0}\right)-\Psi\left(\frac{\theta_0-x}{\sigma_0}\right), \tag{19}$$

$$\Psi(a)=\int_{-\infty}^{a}N(0,1)(t)\,dt \tag{20}$$

（証明）Ⅱ.1 の補題 1 と補題 2 より、たとえば、$\bar{\beta}(1,x)$ は以下の $\bar{\beta}_1(x)=0$ の一意の解として与えられる。ただし、$|\lambda|\leq 1$ に留意して、

$$\begin{aligned}\bar{\beta}_1(\lambda)&=k\int(r(1,\theta)-\lambda)^+f(x\,|\,\theta)\,d\theta+\int(r(1,\theta)-\lambda)^-f(x\,|\,\theta)\,d\theta\\&=k(1-\lambda)\int_{\theta_0}^{\theta_1}f(x\,|\,\theta)\,d\theta-(1+\lambda)\int_{-\infty}^{\theta_0}f(x\,|\,\theta)\,d\theta\\&\quad-(1+\lambda)\int_{\theta_1}^{\infty}f(x\,|\,\theta)\,d\theta\\&=((1-k)\varphi-1)\lambda+(k+1)\varphi-1\end{aligned}$$

ここに、φ は(19)で与えられた $\varphi=\varphi(x\,|\,\theta_0,\theta_1,\sigma_0)$ である。$\bar{\beta}_1(\lambda)=0$ より、(18)の $\bar{\beta}(1,x)$ に関する式を得る。同様にして(18)の $\underline{\beta}(1,x)$, $\bar{\beta}(2,x)$, $\underline{\beta}(2,x)$ に関する式が得られる。（証終）

任意の閉区間 $[a,b]$, $[c,d]$ の大小関係として、$b<c$ のとき、$[a,b]<[c,d]$ とする。この大小関係を適用して管理図の設計を考えてみよう。

$0<\varphi<1$ において、簡単な計算により次が確かめられる：

$$\begin{aligned}\beta(1,x)<\beta(2,x)&\Leftrightarrow\bar{\beta}(1,x)<\underline{\beta}(2,x)\\&\Leftrightarrow\frac{(k+1)\varphi-1}{(k-1)\varphi+1}<\frac{1-(k+1)\varphi}{1+(k-1)\varphi}\Leftrightarrow 0<\varphi<\frac{1}{k+1}',\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta(2,x)<\beta(1,x)&\Leftrightarrow\bar{\beta}(2,x)<\underline{\beta}(1,x)\\&\Leftrightarrow\frac{k-(k+1)\varphi}{k-(k-1)\varphi}<\frac{(k+1)\varphi-1}{(k-1)\varphi+1}\Leftrightarrow\frac{1}{k+1}<\varphi\end{aligned}$$

ここで、次の仮定Aを設ける。

仮定 A

$$\int_{\theta_0}^{\theta_1}N\left(\frac{\theta_0+\theta_1}{2},\sigma_0^2\right)(t)\,dt>\frac{1}{2} \tag{21}$$

ところで、$\varphi(x|\theta_0, \theta_1, \sigma_0)$ は、$x=\dfrac{\theta_0+\theta_1}{2}$ で最大になり, $x<\dfrac{\theta_0+\theta_1}{2}$ で強い意味で増加、$x>\dfrac{\theta_0+\theta_1}{2}$ で強い意味で減少である。従って、仮定Aのもとで 2 つの方程式 $\varphi=\dfrac{1}{k+1}$, $\varphi=\dfrac{k}{k+1}(k\geq 1)$ は、それぞれ 2 根をもつので、その根を $\varphi_1, \varphi_4, \varphi_2, \varphi_3$ とすれば、$k>1$ において $\varphi_1<\varphi_2<\varphi_3<\varphi_4$ である。

決定 $1\in D$ を“システムを停止し点検せよ”、決定 $2\in D$ を“システムは稼働継続とする”に対応させて、次の管理法が考えられる。

<u>ベイズリスク管理法</u>：$X=x$ のとき、

$x\leq\varphi_1$ または $x\geq\varphi_4$ ならば“停止”

$\varphi_2\leq x\leq\varphi_3$ ならば“継続”

$\varphi_1<x<\varphi_2$ または $\varphi_3<x<\varphi_4$ ならば“監視状態”

<u>注意</u>：$X_1, X_2, \cdots, X_n$ を正規母集団 $N(\theta, \sigma_0^2)$ からの大きさ n の無作為標本とする。このとき、標本平均 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ は $N\left(\theta, \dfrac{\sigma_0^2}{n}\right)$ に従う。従って、標本平均 $\overline{X}=x$ に対するベイズリスク管理法の $\varphi_1, \varphi_4, \varphi_2, \varphi_3$ は 2 つの方程式 $\int_{\theta_0}^{\theta_1}N\left(x, \dfrac{\sigma_0^2}{n}\right)(t)dt=\dfrac{1}{k+1}$, $\int_{\theta_0}^{\theta_1}N\left(x, \dfrac{\sigma_0^2}{n}\right)(t)dt=\dfrac{k}{k+1}$ のそれぞれの根として求められる。

Ⅲ.2　事後測度区間の α-パーセンタイル

ここでは、事後測度区間 $I(L_x, kL_x)$ の α-パーセンタイルを求めて、区間管理法を構成する。

正の数 a に対して次を定める。

$$\underline{g}_a(\theta):=1_{(-\infty, a]}(\theta),\ \overline{g}_a(\theta):=1_{[a, \infty)}(\theta) \tag{23}$$

但し、1_A は集合 A の指示関数で、$1_A=1(x\in A), =0(x\notin A)$ である。

次を定義する:

$$\underline{\lambda}(a|x)=\sup\left\{\frac{Q(\underline{g}_a)}{Q(1)}\middle| Q\in I(L_x,\,kL_x)\right\},$$
$$\overline{\lambda}(a|x)=\sup\left\{\frac{Q(\overline{g}_a)}{Q(1)}\middle| Q\in I(L_x,\,kL_x)\right\} \tag{24}$$

次が成り立つ。

補題 6（佐々木、堀口、蔵野2008） 式(24)で与えられた $\underline{\lambda},\overline{\lambda}$ は次で与えられる。

$$\underline{\lambda}(a|x)=\frac{k\Psi\left(\frac{a-x}{\sigma_0}\right)}{1+(k-1)\Psi\left(\frac{a-x}{\sigma_0}\right)},\ \overline{\lambda}(a|x)=\frac{k\left(1-\Psi\left(\frac{a-x}{\sigma_0}\right)\right)}{k-(k-1)\Psi\left(\frac{a-x}{\sigma_0}\right)} \tag{25}$$

任意の $0<\alpha<1$ に対して、$\underline{\lambda}\left(\underline{p}_\alpha|x\right)=\alpha,\ \overline{\lambda}(\overline{p}_\alpha|x)=\alpha,$ を満たす $\underline{p}_\alpha=\underline{p}_\alpha(x),\ \overline{p}_\alpha=\overline{p}_\alpha(x)$ を考える。このとき $\dfrac{Q((-\infty,\,\underline{p}_\alpha])}{Q(1)}\leq\alpha,\ \dfrac{Q([\overline{p}_\alpha,\,\infty))}{Q(1)}\leq\alpha$（$Q\in I(L_x,\,kL)$）が成り立つので、$\underline{p}_\alpha,\overline{p}_\alpha$ をそれぞれ下側および上側区間 α-パーセンタイルと呼ぼう。

補題 6 より、次の定理を得る。

定理 1（佐々木、堀口、蔵野2008） 下側および上側の α-パーセンタイル $\underline{p}_\alpha,\overline{p}_\alpha$ は、それぞれ次で与えられる：

$$\underline{p}_\alpha(x)=x+\sigma_0\Psi^{-1}\left(\frac{\alpha}{(1-\alpha)k+\alpha}\right),$$
$$\overline{p}_\alpha(x)=x+\sigma_0\Psi^{-1}\left(\frac{(1-\alpha)k}{(1-\alpha)k+\alpha}\right) \tag{26}$$

定理 1 を応用して、区間ベイズによる管理図を与える。$X_1,X_2,\cdots,X_n$ を正規母集団 $N(\theta,\sigma_0^2)$ からの大きさ n の無作為標本とする。但し、σ_0^2 は既知とする。このとき、$\overline{X}\sim N\left(\theta,\frac{\sigma_0^2}{n}\right)$ となる。

次の仮説を考える。

$H_0：\theta=\theta_0$

$H_1：\theta<\theta_0$（$H_2：\theta>\theta_0$）

$\overline{X}=x$ のとき、下側 α-パーセンタイル $\underline{p}_\alpha(x)$ の定義から、仮説 H_0 の対立仮説 H_1 に対する任意の $Q_x\in I(L_x, kL_x)$ の有意水準 α 以下の棄却域は $(-\infty, \underline{p}_\alpha(x)]$ となる。同様に、仮説 H_0 の対立仮説 H_2 に対する棄却域は、$[\overline{p}_\alpha(x), \infty)$ となる。

補題 6 より次を得る：

$$\theta_0\leq\underline{p}_\alpha(x)\Leftrightarrow x\leq\theta_0+\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\Psi^{-1}\left(\frac{\alpha}{(1-\alpha)k+\alpha}\right),$$

$$\theta_0\geq\overline{p}_\alpha(x)\Leftrightarrow x\geq\theta_0+\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\Psi^{-1}\left(\frac{(1-\alpha)k}{(1-\alpha)k+\alpha}\right)$$

従って、区間ベイズ法による 1 つの合理的な管理方法として、有意水準 2α の棄却域が次のように得られる。

次の区間 $D(\alpha, k, n)$ を定義する：

$$D(\alpha, k, n)=\left[\theta_0+\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\Psi^{-1}\left(\frac{\alpha}{(1-\alpha)k+\alpha}\right),\right.$$
$$\left.\theta_0+\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\Psi^{-1}\left(\frac{(1-\alpha)k}{(1-\alpha)k+\alpha}\right)\right]$$

このとき、管理方式としては $\overline{X}=x$ のとき、

$$\begin{cases} x\in D \text{ ならば “Continue Production”} \\ x\notin D \text{ ならば “Stop and investigate”} \end{cases}$$

となる。

表 3 は、Ψ^{-1} に関する表で、表中で $k=1$ の場合の列の数字は丁度、標準正規分布の 2α 点を表している。表 4 は、サンプル数 $n=5$ の場合の管理区間 $D(\alpha, k, 5)$ であり、表 5 は $n=50$ の場合の管理区間 $D(\alpha, k, 20)$ である。

事前測度区間としてルベーグ測度 L を用いた $I(L, kL)$ を考えているので、$k=1$ のときは $I(L, kL)=\{L\}$ となり、事前測度としてルベーグ測度（improper）を仮定していることになる。この場合、例えば $\alpha=0.025$ のとき、

管理区間は（$-1.96, 1.96$）となるが、このことは表3から確かめられる。一般に、k が増加すれば管理区間は集合の包含関係のもとで増加する。良く用いられる3シグマ管理図には、$k=1, \alpha=0.00135$ の場合が対応している。表3から、ベイズ区間管理図において3シグマ管理図は、$k=4, \alpha=0.005$ に相等していることがわかる。n の取り方から容易にわかるように、表5のそれぞれの管理区間は表4の区間の半分になっている。

表3：$\left(\boldsymbol{\Psi}^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}}{(1-\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{k}+\boldsymbol{\alpha}}\right), \boldsymbol{\Psi}^{-1}\left(\frac{(1-\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{k}}{(1-\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{k}+\boldsymbol{\alpha}}\right)\right)$ の表

α, k	1	2	3	4	5	10
0.1	−1.282,1.282	−1.620,1.620	−1.803,1.803	−1.926,1.926	−2.019,2.019	−2.291,2.291
0.05	−1.645,1.645	−1.949,1.949	−2.114,2.114	−2.227,2.227	−2.311,2.311	−2.560,2.560
0.025	−1.960,1.960	−2.237,2.237	−2.388,2.388	−2.491,2.491	−2.569,2.569	−2.800,2.800
0.005	−2.576,2.576	−2.806,2.806	−2.934,2.934	−3.022,3.022	−3.089,3.089	−3.289,3.289
0.00135	−3.000,3.000	−3.205,3.205	−3.320,3.320	−3.399,3.399	−3.460,3.460	−3.642,3.642

表4：$\boldsymbol{H_0}$：$\boldsymbol{\theta_0=0}, \boldsymbol{\sigma_0=1}$ のときの $\boldsymbol{D(\alpha, k, 5)}$ の表

α, k	1	2	3	4	5	10
0.1	−0.573,0.573	−0.724,0.724	−0.806,0.806	−0.862,0.862	−0.903,0.903	−1.024,1.024
0.05	−0.736,0.736	−0.872,0.872	−0.946,0.946	−0.996,0.996	−1.034,1.034	−1.145,1.145
0.025	−0.877,0.877	−1.000,1.000	−1.068,1.068	−1.114,1.114	−1.149,1.149	−1.252,1.252
0.005	−1.152,1.152	−1.255,1.255	−1.312,1.312	−1.352,1.352	−1.381,1.381	−1.471,1.471
0.00135	−1.342,1.342	−1.433,1.433	−1.485,1.485	−1.520,1.520	−1.547,1.547	−1.629,1.629

表5：$\boldsymbol{H_0}$：$\boldsymbol{\theta_0=0}, \boldsymbol{\sigma_0=1}$ のときの $\boldsymbol{D(\alpha, k, 20)}$ の表

α, k	1	2	3	4	5	10
0.1	−0.287,0.287	−0.362,0.362	−0.403,0.403	−0.431,0.431	−0.451,0.451	−0.512,0.512
0.05	−0.368,0.368	−0.436,0.436	−0.473,0.473	−0.498,0.498	−0.517,0.517	−0.572,0.572
0.025	−0.438,0.438	−0.500,0.500	−0.534,0.534	−0.557,0.557	−0.574,0.574	−0.626,0.626
0.005	−0.576,0.576	−0.627,0.627	−0.656,0.656	−0.676,0.676	−0.691,0.691	−0.736,0.736
0.00135	−0.671,0.671	−0.717,0.717	−0.742,0.742	−0.760,0.760	−0.774,0.774	−0.814,0.814

Ⅳ　ファジィベイズ法と品質管理

ここでは、正規母集団のファジィベイズモデルに対して、ファジィベイズリスクや δ-レベルパーセンタイルを記述し、品質管理法を構成する。

Ⅳ.1　ファジィパレート最適と location problem

決定空間 $D=\mathbb{R}$ として $\theta\in\Theta$ が真のとき、決定 $d\in D$ をとったときの損失 $r(d,\theta)$ に対して、正規分布 $N(\mu,\sigma_0^2)$ によるベイズリスクを $r(d,\mu)=\int r(d,\theta)N(\mu,\sigma_0^2)(\theta)d\theta$ で表す。$\tilde{\mu}\in\mathcal{F}(\mathbb{R})$ に対して、Zadeh の拡張原理を適用して、Ⅱ．2 の式⒁より、$\beta(d,\tilde{\mu})=r(d,\tilde{\mu})=\int r(d,\theta)N(\tilde{\mu},\sigma_0^2)(\theta)d\theta$ を定める。Ⅱ．2 の補題 3，4 より次が容易に成立する。

補題 7　各 $d\in D$ に対して、$r(d,\mu)$ が μ に関して単調かつ連続とする。このとき、任意のファジイ数 $\tilde{\mu}\in\tilde{\mathbb{R}}$ に対して、

（ i ）$\beta(d,\tilde{\mu})\in\tilde{\mathbb{R}}$

（ ii ）$\beta(d,\tilde{\mu})_\delta=[\min_{\mu\in\tilde{\mu}_\delta}r(d,\mu),\max_{\mu\in\tilde{\mu}_\delta}r(d,\mu)]$

補題 7 の仮定のもとで、$d^*\in\mathbb{R}$ がパレート最適であるとは、$\beta(d,\tilde{\mu})\prec\beta(d^*,\tilde{\mu})$ となる $d\in D$ が存在しない場合をいう。

$r(d,\theta)=(d-\theta)^2$（location problem）とする。$r(d,\mu)=\sigma_0^2+(\mu-d)^2$ と書きなおせるので、補題 7 より

$$\beta(d,\tilde{\mu})_\delta=\sigma_0^2+\left[\underline{\beta}(d)_\delta,\overline{\beta}(d)_\delta\right] \tag{27}$$

但し、

$$\begin{cases}\underline{\beta}(d)_\delta=0,\ d\in\tilde{\mu}_\delta=\left[\underline{\mu}_\delta,\overline{\mu}_\delta\right],=\min\left\{\left(\underline{\mu}_\delta-d\right)^2,\left(\overline{\mu}_\delta-d\right)^2\right\},\ \text{その他}\\ \overline{\beta}(d)_\delta=\max\left\{\left(\underline{\mu}_\delta-d\right)^2,\left(\overline{\mu}_\delta-d\right)^2\right\}\end{cases} \tag{28}$$

以上の結果とファジィ・マックス順序の定義から、次を得る。

命題 1　$d^*\in\tilde{\mu}_1$ かつ $\max\left\{\left(\underline{\mu}_\delta-d\right)^2,\left(\overline{\mu}_\delta-d\right)^2\right\}$ が $0<\delta<1$ に関して $d=d^*$ のときに一様に最小になるならば d^* はファジィパレート最適である。

上の命題から、$\tilde{\mu}$ がある点 $a\in\tilde{\mu}_1$ で対称なファジイ数のとき、$d^*=a$ はファジィパレート最適であることがわかる。

Ⅳ.2　δ-レベルパーセンタイル管理法

この節では、母平均(θ と表す)が未知、分散(c^2 と表す)は既知の正規母集団について、ファジィ正規分布を母平均の事前分布としたときのベイズ解析について考察する。

ファジイ事後分布

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ を正規母集団 $N(\theta, c^2)$ からの大きさ n の無作為標本とする(θ は未知、c は既知)。このとき、$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ は $N\left(\theta, \dfrac{c^2}{n}\right)$ に従う。θ の事前分布を $N(\mu, \sigma_0^2)$ とするとき、$\overline{X}=\overline{x}$ のときの θ の事後分布は $N(\mu_{\bar{x}}, \sigma_n^2)$ である（渡部1999)。ただし、

$$\mu_{\bar{x}}=\frac{n\overline{x}/c^2+\mu/\sigma_0^2}{n/c^2+1/\sigma_0^2},\ \sigma_n^2=\frac{1}{n/c^2+1/\sigma_0^2} \tag{29}$$

$\tilde{\mu}\in F(\mathbb{R})$ に対して、ファジィ正規分布 $N(\tilde{\mu}, \sigma_n^2)$ を未知の母平均 θ の事前分布とし、$\overline{X}=\overline{x}$ を観測した場合の事後ファジィ正規分布 $N(\tilde{\mu}_{\bar{x}}, \sigma_n^2)$ を以下のようにして定義しよう。式(29)の第１式の右辺を $\mu\in\mathbb{R}$ の関数と見て $\theta_{\bar{x}}(\mu)$ で表す。すなわち、

$$\theta_{\bar{x}}：\mu\in\mathbb{R}\rightarrow\frac{n\overline{x}/c^2+\mu/\sigma_0^2}{n/c^2+1/\sigma_0^2}\in\mathbb{R} \tag{30}$$

ここで，事後ファジィ正規分布を次で定める。

$$N(\tilde{\mu}_{\bar{x}}：\sigma_n^2)=N(\theta_{\bar{x}}(\tilde{\mu}), \sigma_0^2),\ \tilde{\mu}_{\bar{x}}=\theta_{\bar{x}}(\tilde{\mu}) \tag{31}$$

任意の $a\in\mathbb{R}$ 対して、$N(\tilde{\mu}_{\bar{x}}, \sigma_n^2)$ の片側ファジィ確率を次で表す：

$$\tilde{\lambda}_U(a|\overline{x}):=N([a, \infty)|\theta_{\bar{x}}(\tilde{\mu}), \sigma_n^2),$$

$$\tilde{\lambda}_L(a|\overline{x}):=N((-\infty, a]|\theta_{\bar{x}}(\tilde{\mu}), \sigma_n^2) \tag{32}$$

定理 2　（佐々木、堀口2012）$\tilde{\mu}\in\tilde{\mathbb{R}}$ のとき、次の(ｉ)〜(ⅲ)が成り立つ。

(ｉ)　任意の $a\in\mathbb{R}, \overline{X}=\overline{x}$ に対して、$\tilde{\lambda}_U(a|\overline{x})\in\tilde{\mathbb{R}}, \tilde{\lambda}_L(a|\overline{x})\in\tilde{\mathbb{R}}$,

（ⅱ）　任意の $\delta(0\leq\delta\leq1)$ に対して、

$$\tilde{\lambda}_U(a|\overline{x})_\delta=[\lambda_U^-(a|\overline{x})_\delta,\ \lambda_U^+(a|\overline{x})_\delta],$$

$$\tilde{\lambda}_L(a|\overline{x})_\delta=[\lambda_L^-(a|\overline{x})_\delta,\ \lambda_L^+(a|\overline{x})_\delta] \tag{33}$$

但し、$\tilde{\mu}_\delta=[\mu_\delta^-,\ \mu_\delta^+]$ とおくと、

$$\lambda_U^\pm(a|\overline{x})_\delta=N([a,\ \infty)|\theta_{\bar{x}}(\mu_\delta^\pm),\ \sigma_n^2),$$

$$\lambda_L^\pm(a|\overline{x})_\delta=N((-\infty,\ a]|\theta_{\bar{x}}(\mu_\delta^\mp),\ \sigma_n^2)\quad（複合同順）$$

（ⅲ）　$\lambda_U^\pm(a|\overline{x})$ は a についての連続な減少関数、$\lambda_L^\pm(a|\overline{x})$ は a についての連続な増加関数である。

δ-レベルパーセンタイル

任意の $\delta(0<\delta\leq1),\ \alpha(0<\alpha<1)$ に対して、$\lambda_L^-\left(\underline{p}|\overline{x}\right)_\delta=\alpha$ となる $\underline{p}$ は、定理 2（ⅲ）より一意に定まる。これを $\underline{p}(\alpha|\overline{x},\ \delta)$ と記す。同様に、$\lambda_U^+(\overline{p}|\overline{x})_\delta=\alpha$ となる $\overline{p}$ を $\overline{p}(\alpha|\overline{x},\ \delta)$ と記す。$\underline{p}(\alpha|\overline{x},\ \delta)$（または $\overline{p}(\alpha|\overline{x},\ \delta)$）を δ-レベル下側（または上側）α-パーセンタイルという。

次のような仮説を考える。

$$H_0:\theta=\theta_0\ （または\ \theta\in\Theta_0）,\ H_1:\theta<\theta_0(\theta\in\Theta_1),\ H_2:\theta>\theta_0(\theta\in\Theta_2)$$

$N([a,\ \infty)|\theta_{\bar{x}}(\tilde{\mu}),\ \sigma_n^2)_\delta\ni\alpha$ であることは、定理 2 より $\lambda_U^-(a|\overline{x})_\delta\leq\alpha\leq\lambda_U^+(a|\overline{x})_\delta$ と表せるから、そのような a の最大値は $\overline{p}(\alpha|\overline{x},\ \delta)$ となる。従って，ベイズ理論の仮説検定の方法を適用して、対立仮説 H_1 に対する H_0 の棄却域は次のようになる：

$$\theta_0\geq\overline{p}(\alpha|\overline{x},\ \delta) \tag{34}$$

同様に、対立仮説 H_2 に対する H_0 の棄却域は次のようになる：

$$\theta_0\leq\underline{p}(\alpha|\overline{x},\ \delta) \tag{35}$$

ここで、棄却域(34)、(35)を具体的に求めてみよう。母平均 θ に関して、$\tilde{\theta}\sim N(\tilde{\mu},\ \sigma_0^2)$ とする。前述で定義した δ-レベル上側 α-パーセンタイル $\overline{p}(\alpha|\overline{x},\ \delta)$ を $\overline{p}$ とするとき、$\lambda_U^+(\overline{p}|\overline{x})_\delta=\alpha$ を書き下すと

$$N(\tilde{\theta}\geq\overline{p}|\theta_{\bar{x}}(\mu_\delta^+),\ \sigma_n^2)=\alpha,\ N(\tilde{\theta}\leq\overline{p}|\theta_{\bar{x}}(\mu_\delta^+),\ \sigma_n^2)=1-\alpha$$

これより、$\overline{p}=\theta_{\bar{x}}(\mu_\delta^+)+\sigma_n\Psi^{-1}(1-\alpha)$ を得る。ただし、Ψ は標準正規分布

$N(0, 1)$ の分布関数を表す。

従って、不等式(34)は、次の式と同値になる：

$$\bar{x} \leq \frac{c^2}{n}\left(\frac{\theta_0}{\sigma_n^2} - \frac{\mu_\delta^+}{\sigma_0} - \frac{\Psi^{-1}(1-\alpha)}{\sigma_n}\right) \tag{36}$$

式(36)の右辺を対立仮説 H_1 に対する棄却域の許容左端点（限界点）として $\underline{d}(\theta_0, \delta. \alpha)$ とおくことにする。同様に、上式の μ_δ^+ を μ_δ^- に変えて

$$\bar{x} \geq \frac{c^2}{n}\left(\frac{\theta_0}{\sigma_n^2} - \frac{\mu_\delta^-}{\sigma_0} - \frac{\Psi^{-1}(1-\alpha)}{\sigma_n}\right) \tag{37}$$

の右辺を対立仮説 H_1 に対する棄却域の許容右端点として $\bar{d}(\theta_0, \delta, \alpha)$ とおく。このとき、次のような判断をすることができる。

$\bar{x} \leq \underline{d}(\theta_0, \delta, \alpha)$ ならば停止

$\underline{d}(\theta_0, \delta, \alpha) < \bar{x} < \bar{d}(\theta_0, \delta, \alpha)$ ならば監視状態

$\bar{x} \geq \bar{d}(\theta_0, \delta, \alpha)$ ならば継続（正常状態）

対立仮説 H_2 に対する棄却域については、以下のようになる。はじめに、

$$\underline{p} = \theta_{\bar{x}}(\mu_\delta^+) + \sigma_n \Psi^{-1}(\alpha) \tag{38}$$

とおいて、$\theta_0 \leq \underline{p}$ となる領域を求めると、

$$\bar{x} \leq \frac{c^2}{n}\left(\frac{\theta_0}{\sigma_n^2} - \frac{\mu_\delta^+}{\sigma_0} - \frac{\Psi^{-1}(\alpha)}{\sigma_n}\right) := \underline{e}(\theta_0, \delta, \alpha) \tag{39}$$

となり、上式の μ_δ^+ を μ_δ^- に変えた場合についても

$$\bar{x} \geq \frac{c^2}{n}\left(\frac{\theta_0}{\sigma_n^2} - \frac{\mu_\delta^-}{\sigma_0} - \frac{\Psi^{-1}(\alpha)}{\sigma_n}\right) := \bar{e}(\theta_0, \delta, \alpha) \tag{40}$$

を得るから、

$\bar{x} \leq \bar{e}(\theta_0, \delta, \alpha)$ ならば停止

$\underline{e}(\theta_0, \delta, \alpha) < \bar{x} < \bar{e}(\theta_0, \delta, \alpha)$ ならば監視状態

$\bar{x} \geq \underline{e}(\theta_0, \delta, \alpha)$ ならば継続（正常状態）

となる。

三角ファジイ数での例

ここでは、$\tilde{\mu}$ を三角ファジィ数とする。すなわち、

$$\tilde{\mu}:=N(a/b/c)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a}, & \alpha\leq x\leq b\\[2ex] \dfrac{c-x}{c-b}, & b<x\leq c\\[2ex] 0, & \text{その他}\end{cases} \tag{41}$$

δ-レベル集合は次で与えられる：

$$\tilde{\mu}_\delta=[\mu_\delta^-,\mu_\delta^+],\ 0\leq\delta\leq 1 \tag{42}$$

但し、$\mu_\delta^-=b\delta+a(1-\delta)$, $\mu_\delta^+=b\delta+c(1-\delta)$.

具体的に、$N(-4/0/-4)$, $n=10$、既知の分散の値 $c^2=1$、事前知識 $N(\tilde{\mu},1)$ として、
有意水準 $\alpha=0.025, 0.05$ に対する δ-レベルの棄却域に対する端点を表 6 、表 7 に示す。

表 6 ：棄却域を決める各端点 $(\underline{d},\overline{d},\underline{e},\overline{e})$, $\alpha=0.025$

δ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$\overline{e}$	1.05005	0.970047	0.890047	0.810047	0.730047	0.650047
$\underline{e}$	0.250047	0.330047	0.410047	0.490047	0.570047	0.650047
$\overline{d}$	−0.250047	−0.330047	−0.410047	−0.490047	−0.570047	−0.650047
$\underline{d}$	−1.05005	−0.970047	−0.890047	−0.810047	−0.730047	−0.650047

表 7 ：棄却域を決める各端点 $(\underline{d},\overline{d},\underline{e},\overline{e})$, $\alpha=0.05$

δ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$\overline{e}$	0.945536	0.865536	0.785536	0.705536	0.625536	0.545536
$\underline{e}$	0.145536	0.225536	0.305536	0.385536	0.465536	0.545536
$\overline{d}$	−0.145536	−0.225536	−0.305536	−0.385536	−0.465536	−0.545536
$\underline{d}$	−0.945536	−0.865536	−0.785536	−0.705536	−0.625536	−0.545536

例えば，帰無仮説 H_0：$\theta=0$、対立仮説 H_1：$\theta\neq 0$, $\alpha=0.05$ での両側検定の場合について、$\delta=0.8$ で考えた場合、$\overline{x}$ の値が、$\overline{x}<-0.730047$ または

$0.730047 < \bar{x}$ ならば、仮説 H_0 を棄却し、$-0.730047 \leq \bar{x} < -0.570047$ または $0.570047 < \bar{x} \leq 0.730047$ ならば監視状態、$-0.570047 \leq \bar{x} \leq 0.570047$ ならば正常状態と考える。

（筆者（蔵野）は千葉大学名誉教授）
（筆者（堀口）は神奈川大学理学部）
（筆者（佐々木）は日本ピュアテック株式会社 品質保証部）

参考文献

［1］ J. A. Bather (1963), “Control charts and minimization of costs”, *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B,* Vol. 25, pp. 49-80.

［2］ Robert V. Baxley, Jr (1995), “An application of variable sampling interval control charts,” *Journal of Quality Technology,* Vol. 27(4), pp. 275-282.

［3］ Lorraine De Robertis and J. A. Hartigan (1981), “Bayesian inference using intervals of measures,” *Ann. Statist,* Vol. 9(2), pp. 235-244.

［4］ M. A. Girshick and Herman Rubin (1952), “A Bayes approach to a quality control model,” *Ann. Math. Statistics,* Vol. 23, pp. 114-125.

［5］ Vilém Novák (1989), *Fuzzy sets and their applications,* Adam Hilger Ltd., Bristol. Translated from the Czech.

［6］ H. T. Nguyen (1978), “A note on the extension principle for fuzzy sets,” *J. Math. Anal. Appl.,* Vol. 64, No. 369, pp. 338-353.

［7］ E. L. Porteus and A. Angelus (1997), “Opportunities for improved statistical process control,” *Management Sci.,* Vol. 43, pp. 1214-1228,.

［8］ J. Ramík and J. Římánek (1985), “Inequality relation between fuzzy members and its use in fuzzy optimization,” Fuzzy Sets and Systems, Vol. 16, pp. 123-138.

［9］ Marion R. Reynolds, Jr., Jesse C. Arnold, Raid W. Amin, and Joel A. Nachlas (1988), “$\overline{X}$ charts with variable sampling intervals,” *Technometrics,* Vol. 30(2), pp. 181-192.

［10］ W. A. Schewhart (1931), *Economic Control of Quality of Manufactured Product,* Van Nostrand,. 白崎 文雄（訳),「工業製品の経済的品質管理」, 日本規格協会.

［11］ George Tagaras (1994), “A dynamic programming approach to the economic design of $\overline{X}$-charts,” *IIE Trans.,* Vol. 26(3), pp. 48-56.

［12］ George Tagaras (1998), “Dynamic control charts for finite production runs,” *Europian J. Oper. Res.,* Vol. 91, pp. 38-55.

［13］ L. A. Zadeh (1965), “Fuzzy sets,” *Information and Control,* Vol. 8, pp. 338-353.

［14］ 太田 宏（1989)「フィジィ理論の品質管理への応用」『科学研究費報告書』.

［15］ 金川 明弘（1991/92)「ファジィ理論の品質管理への応用」『日本ファジイ学会誌』

75頁.
［16］　坂和 正敏（1989）『ファジィ理論の基礎と応用』森北出版、pod 版（2007）.
［17］　佐々木稔、堀口正之、蔵野正美（2008）「区間ベイズ推定による適応型品質管理」『数理解析研究所講究録1589「不確実な状況における意思決定の理論と応用」』、120-129頁.
［18］　佐々木稔、堀口正之（2011）「区間ベイズ手法による不適合品の事前検出」『数理解析研究所講究録1734「不確実性下における意思決定問題」』、156-163頁.
［19］　佐々木稔、堀口正之（2012）「ファジィベイズ手法の品質管理への応用」『数理解析研究所講究録「確率的環境下における意思決定解析」』、2012年11月19日-21日.
［20］　繁桝 算男（1985）『ベイズ統計入門』東京大学出版会.
［21］　長沢 伸也（1992）「ファジィ－理論と応用－」『品質管理』第43巻、83-89頁.
［22］　堀口 正之（2010）「未知の推移確率行列の事前・事後区間表現とマルコフ決定過程について」『数理解析研究所講究録1682「不確実・不確定性下での意思決定過程」』、70-77頁.
［23］　宮沢 光一（1971）『情報・決定理論序説』岩波書店.
［24］　渡部 洋（1999）『ベイズ統計学入門』福村出版.